UNIVERSITE TOULOUSE III **Janvier 2012**

Licence Physique-Chimie et Applications

Mention Sciences Physiques et Chimiques-L3

Electromagnétisme de la matière

Examen terminal

Durée 2h ; le barème est donné à titre indicatif

I. Question de cours (4 pts)

Démontrer que pour une sphère uniformément aimantée $\vec{B}_{in} = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$. Pour cela on pourra partir de l'expression du potentiel vecteur créé par la matière $\vec{A}_{m,in}$ en fonction de l'aimantation $\vec{M}$ et d'un champ auxiliaire que l'on définira.

On rappelle que $\vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{M} \wedge \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} dV$ et qu'en coordonnées cylindriques pour un champ de vecteurs $\vec{V}$, on a: $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$.

II. Cylindre conducteur dans une double gaine diélectrique (5pts)

On considère un cylindre conducteur d'axe Δ, de rayon a et de longueur $L >> a$ chargé uniformément sur sa surface latérale. On appelle σ la densité de charge par unité de surface correspondante. Le cylindre est entouré par deux couches diélectriques de surfaces cylindriques et d'axe Δ, globalement neutres. Les données supplémentaires du problème sont :

- la première couche, de rayon intérieur a et de rayon extérieur b, a pour permittivité diélectrique relative ε_{1r},
- la deuxième couche, de rayon intérieur b et de rayon extérieur c, a pour permittivité diélectrique relative ε_{2r},
- pour $\rho > c$, l'espace est vide.
- Il n'y a aucune charge électrique à l'interface entre les milieux.

La permittivité diélectrique du vide est notée ε_0. *On indiquera systématiquement les unités des grandeurs physiques mises en jeu dans le système international et on vérifiera l'homogénéité des équations.*

1) Donner l'expression du vecteur directeur de l'induction électrique $\vec{D}/|\vec{D}|$ dans les différentes régions de l'espace en utilisant la base cylindrique $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$. Justifier la réponse par la symétrie et les invariances.

2) Quelle est la charge Q intérieure à un cylindre d'axe Δ, de rayon ρ tel que $a < \rho < b$, et de hauteur h ?

3) Donner l'expression de $\vec{D}$ dans les différentes régions de l'espace en fonction des coordonnées cylindriques et des données du problème. **…/…**

4) Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}$ dans les différentes régions de l'espace en utilisant la base cylindrique $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ et les données du problème.

5) Donner l'allure de $|\vec{E}|$ et $|\vec{D}|$ en fonction de la coordonnée cylindrique la plus significative, dans les deux cas suivants :

$\varepsilon_{1r} = 5$, $\varepsilon_{2r} = 10$.

$\varepsilon_{1r} = 10$, $\varepsilon_{2r} = 5$.

III. Sphère supraconductrice (5pts)

Une sphère supraconductrice est soumise à un champ magnétique appliqué uniforme $\vec{B}_a$. La température est inférieure à la température critique du matériau supraconducteur.

1) Donner la valeur de $\vec{B}_{in}$ dans le matériau supraconducteur.

2) Indiquer qualitativement sur un dessin comment sont modifiées les lignes de champ lorsqu'on place une telle sphère supraconductrice dans un champ appliqué uniforme ? On rappelle les relations de passage qui relient $\vec{B}_{in}$, $\vec{B}_{ex}$ et $\vec{J}_S$ à la surface du matériau : $\vec{n}_{ex} \, x (\vec{B}_{ex} - \vec{B}_{in}) = \mu_0 \vec{J}_S$ et $\vec{n}_{ex} . (\vec{B}_{ex} - \vec{B}_{in}) = 0$.

3) En utilisant le résultat de la question de cours I., exprimer l'aimantation homogène $\vec{M}$ en fonction de $\vec{B}_a$.

4) Etablir l'expression des courants en fonction de $\vec{M}$ puis de B_a et des coordonnées sphériques.

5) Donner les composantes du champ magnétique dans le voisinage extérieur de la surface de la sphère en fonction de B_a et des coordonnées sphériques.

IV. Permittivité complexe et propagation dans un conducteur imparfait (6 pts)

On admettra sans démonstration que l'équation d'onde pour une onde électromagnétique plane <u>transverse</u> se propageant selon $\vec{e}_z$ est en notation complexe : $\Delta \underline{\vec{E}}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\varepsilon}_r \, \underline{\vec{E}}_0 = \vec{0}$ où $\underline{\vec{E}}_0$ est l'amplitude complexe d'une onde de champ électrique $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp(-i\omega t)$.

1) On cherche des solutions du type : $\underline{\vec{E}}_0(\vec{r}) = \vec{E}_m \exp(i \, \underline{\vec{k}} \, \vec{r})$ où $\underline{\vec{k}} = \vec{k}' + i\vec{k}''$ et $\vec{k}'$ et $\vec{k}'' // \vec{e}_z$. Etablir la relation de dispersion reliant $\underline{k}$, ω, c et $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$.

2) Montrer que $\underline{k}$ peut s'exprimer en fonction de $k_0 = \omega / c$ et $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$.

3) On pose $\sqrt{\underline{\varepsilon}_r} = \underline{n} = n + i\,K$. Donner la signification physique de n et K. Exprimer $\underline{k}$ en fonction de k_0, n et K puis $\varepsilon_r' = \mathrm{Re}(\underline{\varepsilon}_r)$ et $\varepsilon_r'' = \mathrm{Im}(\underline{\varepsilon}_r)$ en fonction de n et K.

Dans la suite, on s'intéressera à un milieu conducteur, peuplé d'électrons libres, auquel on appliquera le modèle de Drude.

4) En partant de l'équation fondamentale du modèle de Drude, établir *en quelques lignes* l'expression de $\underline{\varepsilon}_r(\omega, \omega_P, \tau)$. Donner en une phrase le sens physique de ω_P et τ.

5) En déduire les expressions des quantités $(n^2 - K^2) = \mathrm{B}$ et $(2\, n\, k) = 2\mathrm{A}$ où A et B sont des fonctions de ω, ω_P et τ que vous préciserez.

<u>Question Bonus</u> :

6) Indiquez la méthode de calcul puis calculez $n\,(\omega, \omega_P, \tau)$ et $K\,(\omega, \omega_P, \tau)$. *On simplifiera le calcul en considérant les hypothèses suivantes* : $\omega\,\tau >> 1$, $\omega_P\,\tau >> 1$, et $(\omega_P^2 / \omega^2) << 1$.